 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Massbestimmung extensiver Grössen.

Von **E. Study.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1884.)

Derjenige Begriff, durch welchen der von Hermann Grassmann geschaffene und als „Ausdehnungslehre“ bezeichnete Zweig der Mathematik mit der messenden Geometrie in Verbindung tritt, ist der des „numerischen Werthes“ einer extensiven Grösse, in Verbindung mit dem davon abhängigen Begriffe des inneren Productes.

Grassmann bezeichnet (in „A_2“ Nr. 151, wenn wir die beiden Bearbeitungen der Ausdehnungslehre kurz mit A_1 (1844, bezgl. 1878) und A_2 (1862) citiren) als „numerischen Werth“ einer aus von einander unabhängigen Einheiten mittelst reeller Zahlen binear abgeleiteten Grösse die positive Quadratwurzel aus dem „inneren Quadrate“ derselben, d. h. die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Ableitungszahlen, und er findet dann (A_2 Nr. 195 u. ff.), dass die Winkel, deren Cosinus die inneren Producte beliebiger Punkte vom numerischen Werth Eins sind, etwa im Falle eines Gebietes dritter Stufe dieselben Eigenschaften besitzen, welche in der elementaren Geometrie den Punkte einer Kugel verbindenden Bogen grösster Kreise zukommen, so dass man, von dem Begriffe des numerischen Werthes ausgehend, zur elementaren Massgeometrie des Strahlenbündels und weiter zur Euclidischen Raumgeometrie gelangt (A_2 Nr. 216 u. ff).

Es kann nicht geleugnet werden, dass in der Art der Einführung dieses Begriffes bei Grassmann eine gewisse Willkür liegt, die dadurch nicht aufgehoben wird, dass sie sich nachher als zweckmässig herausstellt; auch ist nicht sichtbar gemacht, ob die neben einander hingestellten Definitionen für die Masswerthe (beziehungsweise inneren Producte) der Grössen verschiedener Stufen nicht theilweise von einander abhängig sind, so dass die eine aus der anderen abgeleitet werden kann.

Diese Bemerkung veranlasste mich, zu untersuchen, in wie weit Grassmann's Definitionen willkürlich sind, oder aus Forderungen allgemeiner Art gefolgert werden können.

Da diese Frage für die Leser Grassmann's vielleicht nicht ohne Interesse ist, und sich bei meinem Versuche zur Lösung derselben auch einiges Neue ergeben hat, so erlaube ich mir, meine hierauf bezüglichen Betrachtungen im Folgenden dem mathematischen Publikum vorzulegen. Der in denselben verfolgte Gedankengang ist im wesentlichen der, dass zuerst ein möglichst allgemeiner Ausdruck für den Masswerth angenommen wird, und dieser dann durch Bedingungen eingeschränkt wird, welche den geometrischen Forderungen der allgemeinen Beweglichkeit der Figuren und der von Helmholtz als Monodromie bezeichneten Eigenschaft des Raumes entsprechen.

Man sieht, dass diese Fragestellung, insoweit sie von geometrischem Interesse ist, mit den Untersuchungen von Riemann, Helmholtz und F. Klein über die Grundlagen der Geometrie auf's Engste zusammenhängt. Doch decken sich die Voraussetzungen dieser Arbeit, deren Zweck ja zunächst dem Gebiete der Ausdehnungslehre angehört, nicht vollkommen mit den von Helmholtz[1] angenommenen Axiomen. Zunächst scheint die hier gemachte Annahme, dass der Raum, um den es sich handelt, ein linearer ist und die Bewegungen lineare Transformationen sind, eine viel speciellere zu sein, als diejenige ist, welche Helmholtz' berühmter Abhandlung zu Grunde liegt; es geht aber aus den Entwickelungen von Lobatschewsky hervor, dass in einem Raume mit jenen Eigenschaften die projective Geometrie gilt.

Dagegen ist hier von der Hypothese Helmholtz', dass die Beweglichkeit der Körper eine vollkommen freie sei (was analytisch darin seinen Ausdruck findet, dass die bei den Drehungen um einen Punkt fest bleibenden Elemente imaginär sein müssen), abgesehen, da von dem hier eingenommenen algebraischen Standpunkte aus reelle und imaginäre Grössen als gleichwerthig erscheinen; in Folge hiervon erhält man in der Ebene ausser der Euclidischen und Nichteuclidischen Geometrie noch

[1] „Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen". Gött. Nachr. 1868 S. 139 u. ff.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwei weitere Arten von Massgeometrie mit allgemeiner Beweglichkeit der Figuren.

Die eine derselben bildet einen Grenzfall der Euclidischen Geometrie, indem die sogenannten „Kreispunkte" zusammenfallen, die Andere, wie es scheint bisher noch nicht beachtete, hat als ausgezeichnete Elemente einen Punkt und eine nicht durch denselben gehende Gerade, kann also nicht aus den bisher betrachteten Arten der Geometrie durch einen Grenzübergang abgeleitet werden.[1]

Für ein Gebiet von drei Dimensionen habe ich die entsprechende Untersuchung noch nicht durchgeführt, da hier die Zahl der in Betracht zu ziehenden Transformationsgruppen eine weit grössere wird; doch hoffe ich, dass es mir möglich sein wird, der vorliegenden Arbeit eine Ergänzung folgen zu lassen, welche sich auf diejenigen Fälle im Gebiet vierter Stufe beziehen würde, die sich von den hier behandelten nicht blos durch die Zahl der Veränderlichen unterscheiden.

Was die hier angewandte Terminologie anlangt, so habe ich die Gebiete erster und zweiter Stufe in Anlehnung an die einfachste der geometrischen Einkleidungen der Ausdehnungslehre kurz als „Punkt" und „Gerade" bezeichnet, ohne jedoch in den Schlüssen von geometrischen Begriffen Gebrauch zu machen.

Die auf die geometrische Verdeutlichung bezüglichen Bemerkungen sind unter den Text gestellt, obwohl sie die Vorstellung sehr erleichtern und darum nicht unwesentlich sind. — Ich musste sie von dem Übrigen abtrennen, wollte ich mich nicht einer Vermengung verschiedener Methoden schuldig machen.

In §. 1 wird gezeigt, dass die Coëfficienten der Zahlbeziehungen, welche zwischen den Punkten eines Ausdehnungsgebietes

---

[1] Die Gruppe von ∞^3 collinearen Transformationen, welche zwei Punkte und eine durch einen derselben gehende Gerade unverändert lassen, führt auf eine Massbestimmung, welche als in gewissem Sinne reducibel bezeichnet werden kann, und daher zu keiner eigentlichen Geometrie gehört. Man erhält nämlich für die Entfernung zweier Geraden oder Punkte zwei von einander ganz unabhängige Ausdrücke, von denen der erste mit dem für den Winkel zweier Geraden in der Euclidischen Geometrie, der andere mit dem dazu dualistischen Ausdruck zusammenfällt.

bestehen, von einer denselben zugeordneten Function, dem „Masswerth“ der extensiven Grössen abhängen, und dass die grosse Willkür, welche deren Wahl zulässt, zu unendlich vielen, an und für sich gleichwerthigen „Formen“ der Ausdehnungslehre führt.

Diese unterscheiden sich von einander in einem Theile ihrer Gesetze, während sie in einem anderen Theile, der die projektiven Eigenschaften der Mannigfaltigkeit zum Ausdruck bringt, unter einander übereinstimmen.

In §. 2 wird nachgewiesen, dass unter allen möglichen Formen der Ausdehnungslehre diejenigen ausgezeichnet sind, bei welchen das Quadrat des Masswerthes eine ganze Function zweiten Grades der Ableitungszahlen ist, indem diese allein obigen Axiomen genügen.

§. 3 und §. 4 behandeln den Fall eines Gebietes zweiter Stufe, in welchem die beiden Nullpunkte der den Masswerth darstellenden quadratischen Form getrennt sind, §. 5 den Fall, wo dieselben zusammenfallen. Es wird daselbst der Begriff des Winkels und der Entfernung abgeleitet, die beide mit den ebenso benannten Begriffen der Geometrie zusammenfallen.

In den §§. 6, 7, 8 wird das Gebiet dritter Stufe in den drei Fällen behandelt, welche aus der allgemeinen Voraussetzung entstehen, je nachdem man annimmt, dass die den Masswerth darstellende quadratische Form einer Summe von wenigstens drei oder zwei Quadraten, oder einem einzigen Quadrat gleich ist; oder, was dasselbe ist, je nachdem der Ort der Punkte vom Zahlwerthe Null ein eigentlicher Kegelschnitt, oder ein Linienpaar, oder eine Doppelgerade ist. Im letzteren Falle (§§. 8, 9, 10) ist der Ort der Geraden (Linientheile) vom Zahlwerth Null entweder ein Punktepaar, dessen Verbindungslinie die Doppelgerade ist, oder ein doppelt zählender Punkt, der aber nicht auf jener Geraden zu liegen braucht.

1.

Die Ausdehnungslehre ist die Lehre von den Grössen, welche aus einer Anzahl linear unabhängiger Grössen durch (reelle oder gewöhnliche complexe) Zahlen abgeleitet werden können. Indem man n von einander unabhängigen Grössen $e_1, e_2, \ldots e_n$ n beliebige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (Coordinaten) zuordnet, erhält man

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ein Grössengebiet n^{ter} Stufe, dessen einzelnes Element aus der Gesammtheit der abgeleiteten Grössen $\alpha_1 . e_1$, $\alpha_2 . e_2$, . . $\alpha_n . e_n$ besteht. Der Grundgedanke der Ausdehnungslehre ist nun der, dass man eine Gesammtheit solcher Grössen, da sie bei allen auf Wechselbeziehungen derselben bezüglichen Fragen einen einfachen Begriff bildet, auch formal als solchen darzustellen habe,[1] was auf eine einfache Art ausgeführt werden kann, da die Beziehung der einzelnen abgeleiteten Grösse $\alpha_k . e_k$ zu der ursprünglichen e_k mit derjenigen der Multiplication, und die Beziehung einer Gesammtheit solcher abgeleiteten Grössen zu den einzelnen mit der der gewöhnlichen Addition übereinstimmt; so dass man — wenn für gleichbedeutende Operationen auch gleiche Zeichen gewählt werden — die Gesammtheit jener abgeleiteten Grössen als neue „extensive" Grösse unter Anwendung des Multiplicationszeichens (einfaches Nebeneinanderschreiben) und des Summenzeichens ausdrücken kann.

Jedes Element oder jeder „Punkt"

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + . \quad . . + \alpha_n e_n \qquad 1)$$

der so entstandenen Mannigfaltigkeit ist durch das Werthsystem der Ableitungszahlen α_1, α_2, . α_n eindeutig bestimmt; zwei extensive Grössen sind dann und nur dann miteinander vergleichbar, wenn sämmtliche Ableitungszahlen der einen aus den entsprechenden der anderen durch Multiplication mit derselben Zahl hervorgehen.

Für solche Fragestellungen jedoch, welche die Beziehung der Ausdehnungslehre zur messenden Geometrie vermitteln, ist es nothwendig, dass man auch solche extensive Grössen mit einander vergleichen kann, welche sich nicht nur um einen Zahlfactor unterscheiden. Dies kann allgemein erreicht werden, indem man jedem Punkte der Mannigfaltigkeit eine (in hohem Grade willkürliche) Zahl zuordnet, und zwei Punkte dann als „numerisch" gleich ansieht, wenn die beiden zugehörigen Zahlen gleich sind.[2]

Wir bezeichnen diese Zahl α, welche wir als eine Funktion der Zahlen α_1, α_2 . α_n gegeben denken, als „Masswerth" der

[1] Für Grössen 1. Stufe (Punkte) hatte bereits Möbius dieses Verhältniss klar erkannt, und als Grundlage seines „barycentrischen Calculs" benutzt. Baryc. Calcul S. 16 u. ff.

[2] Es wird also die Annahme Grassmann's durch die denkbar allgemeinste Annahme ersetzt.

extensiven Grösse, und ersetzen, um für die Zuordnung derselben zur Grösse e einen einfachen analytischen Ausdruck zu gewinnen, die Gleichung 1) durch[1]

$$\alpha e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad 2)$$

Hier ist α, wenn wir $e_1, e_2, \ldots e_n$ als fest gegeben annehmen, lediglich eine Function der Ableitungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, die, wenn man alle Grössen α_k in einem bestimmten Verhältnisse ändert, eine Änderung in dem nämlichen Verhältnisse erfährt.

Um nicht zu vieldeutigen Operationen zu gelangen, müssen wir von derselben ausserdem noch die Annahme machen, dass es wenigstens ein endliches (d. h. durch endliche Werthe der Ableitungszahlen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmtes) allseitig begrenztes und einfach zusammenhängendes Gebiet gibt, in welchem sowohl α als $\frac{1}{\alpha}$ eindeutige stetige Functionen der Zahlen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind; ausserdem wollen wir noch die Stetigkeit der ersten und zweiten Differentialquotienten von α innerhalb dieses Gebietes voraussetzen.

Innerhalb desselben sind dann alle Zahlbeziehungen, welche zwischen Punkten der Mannigfaltigkeit bestehen, eindeutig bestimmt. Denn sind e, e', e'' irgend drei Punkte des Gebietes, zwischen welchen eine Zahlbeziehung besteht, so folgt aus den Gleichungen:

$$\lambda\alpha_\varkappa + \lambda'\alpha_k' + \lambda''\alpha_k'' = 0 \quad \varkappa = 1, 2, \ldots n$$

welche die Zahlbeziehungen zwischen den Ableitungszahlen ausdrücken, als Gleichung zwischen den drei Punkten selbst

$$\lambda\alpha e + \lambda'\alpha' e' + \lambda''\alpha'' e'' = 0$$

wo die Coëfficienten $\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$, $\lambda''\alpha''$ eindeutig bestimmt sind, da dies nach der Voraussetzung für α, α', α'', der Fall ist.

Die Coëfficienten dieser Zahlbeziehungen sind also von der Function α abhängig, und fallen für zwei verschiedene Functionen α bei den nämlichen Werthen der Ableitungszahlen verschieden aus; so dass also jede solche zu einem geschlossenen System von Zahlbeziehungen zwischen den Punkten der Mannigfaltigkeit führt, welche eine in Bezug auf die Punkte bestimmte „Form der Ausdehnungslehre“ kennzeichnet. Ebenso kann man

[1] Die Zahlen α können selbst wieder höhere complexe Zahlen sein, eine Verallgemeinerung, auf die wir hier jedoch nicht eingehen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

für die Ausdehnungsgrössen höherer Stufe eine analoge Function als Masswerth annehmen, welche die Coëfficienten der zwischen diesen bestehenden Gleichungen bestimmt. Sind α und β zwei zu verschiedenen Formen der Ausdehnungslehre gehörige Masswerthe desselben Punktes, so geschieht der Übergang von den Zahlbeziehungen der ersten zu denen der zweiten, indem man jeden Punkt mit dem zugehörigen Quotienten $\beta : \alpha$ multiplicirt.

Die Gesetze jeder der verschiedenen Arten der Ausdehnungslehre, zu welchen wir so gelangen, scheiden sich nun in zwei Gruppen: in diejenigen Gesetze, welche die betreffende Form mit allen übrigen gemein hat, und in die, welche ihr eigenthümlich sind und ihren besonderen Character bestimmen.

Die erste Gruppe enthält alle die Gesetze, welche nur von dem Vorhandensein von Zahlbeziehungen zwischen bestimmten Punkten der Mannigfaltigkeit abhängen, nicht aber von den Coëfficienten derselben, welche also lediglich lineare Constructionen ausdrücken und vom Masswerth unabhängig sind. Dieselben ändern sich nicht, wenn man jeden vorkommenden Punkt mit einer für ihn beliebigen Zahl $\beta : \alpha$ multiplicirt. (Ein besonderer Fall dieser Transformation ist die affine. S. A_1 §. 165 u. ff.)

Sie unterscheiden sich von den sogenannten symbolischen Ausdrücken der Invarianten-Theorie nicht wesentlich, und können, wie der Verfasser demnächst zu zeigen gedenkt, definirt werden, ohne dass man von willkürlichen Grundpunkten oder von dem Begriffe des Masswerthes Gebrauch macht.

Die zweite Gruppe umfasst die Gesetze, welche nicht erhalten bleiben, wenn man jeden der in dieselben eingehenden Punkte mit einer beliebigen Zahl multiplicirt. Sie beruhen wesentlich auf dem Begriffe des Masswerthes und vermitteln den Zusammenhang der Ausdehnungslehre mit der messenden Geometrie.

Die folgende Untersuchung bezieht sich auf die Gesetze der letzteren Art; es wird in derselben der Versuch gemacht, aus der unendlichen Zahl der möglichen Bildungen solche von besonders einfacher Beschaffenheit abzuscheiden.

Bevor wir jedoch hierzu übergehen, mag noch bemerkt werden, dass die über den Masswerth gemachten beschränkenden Annahmen nur innerhalb eines begrenzten Gebietes erfüllt zu sein

brauchen. Reicht das Gesetz, durch welches der Masswerth bestimmt ist, noch über die Grenzen desselben hinaus, so wird es vorkommen können, dass man zu einem und demselben Punkt auf Wegen gelangen kann, welche sich nicht stetig in einander überführen lassen. Einen solchen Punkt hat man dann, will man die Möglichkeit eindeutiger Constructionen nicht aufgeben, ähnlich wie es in der Theorie der Riemann'schen Flächen geschieht, als mehrere Mal vertreten anzusehen, so dass also bereits zwei von einander verschiedene Punkte in einer Zahlbeziehung stehen können. Jedes Gebiet höherer Stufe, welches einen gegebenen Punkt enthält, enthält dann auch alle die Punkte, welche aus dem ersten linear ableitbar sind. Es wird ferner der Masswerth für gewisse Punkte verschwinden oder unstetig werden können. Punkte der letzteren Art muss man sich, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, als in bestimmter Weise aus anderen entstanden denken; und ebenso hat man mit den Punkten vom Masswerthe Null zu verfahren, wenn es sich darum handelt, von einer Form der Ausdehnungslehre zu einer anderen überzugehen.

2.

Wir beginnen nun die allgemeinen Voraussetzungen, deren wir uns bisher bedienten, einzuschränken, um so zu ausgezeichneten Formen der Ausdehnungslehre zu gelangen. Dies geschieht, geometrisch ausgedrückt, am einfachsten durch die Forderung, dass der Raum an allen Orten und nach allen Richtungen gleich beschaffen sei, d. h. dass an allen Orten und nach allen Richtungen die nämlichen Constructionen vollzogen werden können (S. A_1 §. 22.) — und dass diese Constructionen umkehrbar seien, d. h. dass zwei Punkte a und b, die in einer Construction vorkommen, in einer der ersten gleichen Construction in umgekehrter Folge $b\,a$ vorkommen können. (Axiom der Monodromie.)

In die Sprache der Ausdehnungslehre übersetzt, nimmt diese Forderung folgende exactere Form an: Es seien $a_0\,a_1\,a_2\,\ldots\,a_n$ irgend welche $n+1$ Punkte, von welchen je n von einander unabhängig sind, zwischen welchen also eine einzige lineare Gleichung

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

besteht, deren Coëfficienten bis auf einen gemeinsamen Factor eindeutig bestimmt und sämmtlich von Null verschieden sind. Dann soll zu jedem bestimmt angebbaren Punkt a'_0 in jeder bestimmt angebbaren durch a'_0 gehenden Geraden (Gebiet zweiter Stufe) in jeder Fortschreitungsrichtung derselben ein Punkt a'_1 sich finden lassen, zu diesem Punktepaar in jeder durch $a'_0\ a'_1$ gehenden Ebene (Gebiet dritter Stufe) ein Punkt a'_2 u. s. f. sich ausfindig machen lassen, der Art, dass zwischen den Punkten $a'_0\ a'_1\ a'_2 \ldots a'$ dieselbe lineare Gleichung besteht, wie zwischen den ursprünglichen Punkten $a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_n$; und zwar soll eine solche Construction auch noch möglich sein, wenn man etwa a'_0 und a'_1 vertauscht.

Enthält diese Forderung keinen inneren Widerspruch, und gelingt es, eine Form der Ausdehnungslehre zu bilden, welche ihr genügt, so hat das Ausdehnungsgebilde m^{ter} Stufe derselben die Eigenschaft, (wenigstens) auf $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$-fach unendlich viele verschiedene Arten so auf sich selbst bezogen werden zu können, dass alle Zahlbeziehungen entsprechender Punktgruppen dieselben bleiben.

Wir wollen im Anschluss an eine zuerst von Euler, dann von Moebius (Baryc. Calcul S. 191 u. ff.) und Grassmann in etwas engerem Sinne gebrauchte Bezeichnungsweise sagen, das Gebiet sei durch diese Operation (welche offenbar eine lineare Transformation ist) affin auf sich selbst abgebildet.

Die affine Beziehung erstreckt sich ihrer Definition nach zunächst nur auf Punktgrössen. Verlangen wir, dass sie zugleich auch eine affine Transformation für die Ausdehnungsgrössen höherer Stufe sei, so werden wir die Masswerthe der letzteren nicht mehr wie im allgemeinen Falle unabhängig von den Masswerthen der Punkte annehmen dürfen; denn es müssen die äusseren Producte in zwei Punktgruppen, wenn deren Punkte gleiche Masswerthe haben und durch eine affine Transformation in einander übergehen, nothwendig gleiche Masswerthe besitzen.

Wir werden im Folgenden sehen, inwieweit man über die Masswerthe von Grössen höherer Stufe unter der angegebenen Voraussetzung überhaupt noch willkürlich verfügen kann.

Um den analytischen Ausdruck für den Masswerth der Punkte aus der obigen Bedingung zu finden, wollen wir nun so verfahren, dass wir dieselben nur in einem besonderen Falle benutzen, wobei wir uns zunächst auf reelle Werthe der Ableitungszahlen beschränken, um dann zu zeigen, dass die so gewonnenen Ausdrücke die allgemeine Bedingung ebenfalls befriedigen.

Um dies auszuführen, können wir etwa auf einer Geraden drei Punkte $a_0\ a_1\ a_2$ derart annehmen, dass es eine affine Beziehung der Geraden auf sich selbst gibt, welche a_1 ungeändert lässt, a_0 und a_2 aber vertauscht, was nach unserer Voraussetzung möglich ist.

Dann gibt es immer (wenigstens) eine affine Transformation, welche die Punkte a_0 und a_1 in a_1 und a_2 überführt, sowie eine weitere, welche a_1 und a_2 vertauscht, a_0 aber in einen vierten Punkt a_3 verwandelt. Fügt man zu der letzteren noch die erste Transformation, welche $a_2\ a_1\ a_3$ in $a_3\ a_1\ a_2$ übergehen lässt, so ist damit $a_0\ a_1\ a_2$ in $a_1\ a_2\ a_3$ durch eine affine Transformation übergeführt worden, da zwei derselben, hinter einander angewendet, ihrem Begriffe nach wieder eine solche hervorbringen.

Schreiben wir jetzt den Punkten $a_0\ a_1\ a_2$ den Zahlwerth 1 zu, und leiten aus a_0 und a_1 bezüglich a_1 und a_2 neue Punkte b_0 und b_1 durch dieselben Zahlen ab, so können wir die letzteren durch geeignete multiplicative Änderung der Ableitungszahlen ebenfalls in Punkte vom Zahlwerth 1 verwandeln. Es ist dann b_1 aus a_1 durch dieselbe Operation hervorgegangen, wie b_0 aus a_0, und es können die Punkte a_0 und a_1 sowohl mit b_0 und b_1, als auch mit b_1 und b_0 zur Deckung gebracht werden, wobei dann die früheren Punkte b_0 und b_1 auf die Punkte a_1 und a_0 fallen.

Dies gibt uns für die Ableitungszahlen des veränderlichen Punktes b_0 aus den Punkten a_0 und a_1 eine Bedingungsgleichung, welche bereits den Ausdruck für den Masswerth im Gebiet zweiter Stufe darstellt.

Die zwischen $a_0\ a_1\ a_2$ bestehende lineare Gleichung, in welcher der letzte Coëfficient dem ersten gleich sein muss, und also mit diesem gleich der Einheit gesetzt werden kann, möge lauten:

$$a_0 - 2\beta a_1 + a_2 = 0,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo β eine von Null verschiedene bestimmte Zahl ist. Es sei dann

$$\begin{aligned} \alpha b_0 &= \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 \\ \alpha b_1 &= \alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_2 \\ &= -\alpha_1 a_0 + (\alpha_0 + 2\beta\alpha_1) a_1 \end{aligned}$$

dann wird ebenso

$$\begin{aligned} \alpha a_1 &= \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0 \\ \alpha a_0 &= -\alpha_1 b_1 + (\alpha_0 + 2\beta\alpha_1) b_0, \end{aligned}$$

woraus, wenn man die Werthe von b_0 und b_1 einsetzt:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + 2\beta\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangen wir zu dem allgemeinen Ausdruck für den Masswerth eines aus n von einander unabhängigen Punkten linear ableitbaren Punktes. Wenden wir sie z. B. auf einen Punkt e an, der aus den drei Punkten e_1 e_2 e_3 mittelst der Zahlen α_1 α_2 α_3 linear abgeleitet ist, so erhalten wir für den Zahlwerth α von e drei verschiedene Ausdrücke, entsprechend den drei Arten, wie man zwei dieser Punkte zusammenfassen und mit dem dritten verbinden kann.

Es sei

$$\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha_1' e_1';$$

dann ist

$$\alpha e = \alpha_1 e_1 + \alpha_1' e_1'.$$

Man hat aber nach obiger Formel

$$\begin{aligned} \alpha_1'^2 &= \alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 \\ \alpha^2 &= \alpha_1^2 + 2\gamma_1\alpha_1\alpha_1' + \alpha_1'^2, \end{aligned}$$

wo β_1 eine Constante, γ_1 dagegen eine Function von α_2 und α_3 ist.

Man erhält so die drei Gleichungen:

$$\alpha^2 = a_1^2 + 2\gamma_1\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2} + \alpha_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2$$

$$\alpha^2 = \alpha_2^2 + 2\gamma_2\alpha_2\sqrt{\alpha_3^2 + 2\beta_2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1^2} + \alpha_3^2 + 2\beta_2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1^2$$

$$\alpha^2 = \alpha_3^2 + 2\gamma_3\alpha_3\sqrt{\alpha_1^2 + 2\beta_3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2} + \alpha_1^2 + 2\beta_3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$$

in welchen die Grössen γ_1 γ_2 γ_3 beziehungsweise von den Ableitungszahlen α_1 α_2 α_3 unabhängig sind. Hieraus folgt bei

Vergleichung der drei Ausdrücke, dass die zweiten partiellen Differentialquotienten von

$$\gamma_1 \sqrt{\alpha_2^2 + 2\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3^2}$$

nach α_2 und nach α_3 genommen, verschwinden, dass also diese Grösse eine bilineare Function von α_2 und α_3 ist. Führt man dieselbe in die erste der obigen Gleichungen ein, so entsteht ein Ausdruck zweiten Grades in α_1, α_2, α_3 vermehrt um ein Glied, welches das Product $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ enthält. Dieses muss aber verschwinden, da bei gleichzeitiger Änderung von α_1, α_2, α_3 um einen bestimmten Factor α sich um denselben Factor ändern muss. In ähnlicher Weise kann man weiter schliessen, und wir haben daher den Satz gewonnen:

Erfüllt eine Form der Ausdehnungslehre die zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Bedingung, so ist das Quadrat des Masswerthes eines Punktes, wenn man ihn aus $n+1$ linear unabhängigen Punkten abgeleitet hat, eine ganze Function zweiten Grades der Ableitungszahlen,[1] in welcher die Quadrate den Coëfficienten 1 haben, falls man die ursprünglichen Punkte als mit dem Zahlwerth 1 behaftet annimmt.

Wir gehen nun dazu über, die in dem allgemeinen Ausdruck für den Masswerth enthaltenen besonderen Fälle zu behandeln, die man erhält je nach der kleinsten Zahl von Quadraten, auf welche sich derselbe zurückführen lässt, wobei wir uns, da wir zu einem algebraischen Ausdrucke gelangt sind, nicht mehr auf die Annahme nur reeller Ableitungszahlen zu beschränken brauchen.

Den Fall eines Gebietes zweiter Stufe, auf den sich die übrigen zurückführen lassen, wollen wir etwas ausführlicher erörtern, um dann als ein hinreichend allgemeines Beispiel für die Behandlungsart höherer Gebiete noch das Gebiet dritter Stufe in Betracht zu ziehen.

---

[1] Dies steht im Widerspruch mit der Entwicklung A_2 §. 227. Es folgt aber daselbst S. 150, Z. 22 v. o., nicht $A+B-C=C$, sondern nur $A+B-C\equiv C$, oder $A+B\equiv C$, was die Definition des Punktes C als Mitte von A und B ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

3.

Im Gebiet zweiter Stufe, in welchem der Zahlwerth α eines aus zwei (vielfachen) Punkten e_0 und e_1 mittelst der Zahlen α_0 und α_1 abgeleiteten Punktes durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha^2 = a_{00}\alpha_0^2 + 2a_{01}\,\alpha_0\alpha_1 + a_{11}\alpha_1^2 \qquad 1)$$

gegeben ist, haben wir nur zwei Fälle zu unterscheiden, indem diese Gleichung sich durch Einführung anderer Grundpunkte entweder auf eine Summe von nicht weniger als zwei Quadraten, oder auf ein einziges Quadrat zurückführen lässt.

Im ersten Falle nimmt nach der Ausführung der Reduction die zwischen den Grundpunkten e_1, e_2 mit einem beliebigen Punkte e bestehende Zahlbeziehung die Form an:

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\quad e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\,. \qquad 2)$$

Hier sind e_1 und e_2 Punkte vom Zahlwerthe 1; der eine derselben e_1 kann willkürlich angenommen werden, der andere ist dann zweideutig bestimmt.

Ersetzt man die Punkte e_1, e_2 durch zwei andere gleicher Art, und lässt alle Punkte sich entsprechen, die aus den beiden Punktepaaren mittelst derselben Zahlen abgeleitet sind, so ist dies offenbar eine affine Transformation in dem §. 2 festgestellten Sinne und umgekehrt ist jede affine Transformation auf diese Art darstellbar, da bei jeder solchen ein Punktepaar e_1, e_2 in ein anderes von gleicher Beschaffenheit übergehen muss. Wir wollen solche Punktepaare, die in einer Gleichung von der Form 2) stehen können, als zu einander „normal“ (conjugirt) bezeichnen.[1]

Dem doppelten Vorzeichen der Quadratwurzel in 2) entsprechend ist jeder Punkt des Gebietes zweimal vertreten;

[1] Die Punkte des Gebietes lassen sich mit Rücksicht auf ihren Zahlwerth geometrisch deuten als Strecken, die von dem Mittelpunkte einer Ellipse (Kreis) [S. A_2 Nr. 154 Anm.] oder Hyperbel nach den Punkten der Curve gezogen sind, indem diesen Strecken der Zahlwerth Eins beigelegt wird. „Normale“ Punkte sind dann, wenn man die Strecken durch ihre Endpunkte ersetzt, die Endpunkte conjugirter Durchmesser (die im Falle eines Kreises normal sind); Diametralpunkte die beiden Endpunkte desselben Durchmessers.

zwischen zwei so zusammengehörigen Punkten e, e', die wir als „Diametralpunkte“ [1] bezeichnen, besteht die Gleichung

$$e + e' = 0.$$

Die Gerade ist also mit zwei Zweigen überdeckt zu denken, welche in den Punkten, deren Zahlwerth verschwindet, zusammenhängen. Diese beiden Punkte, die wir aus einem später anzugebenden Grunde als „unendlich ferne“ bezeichnen wollen, bleiben bei allen affinen Transformationen ungeändert; sie sind ihre eigenen Diametralpunkte und zu sich selbst normal.

Die Ausdehnungsgrössen zweiter Stufe sind alle Zahlgrössen und daher ohne weiteres mit einander vergleichbar. Setzen wir das äussere Product zweier zu einander normalen einfachen Punkte gleich 1, so sind dann die äusseren Producte von irgend zwei einfachen Punktepaaren, die durch eine affine Transformation in einander übergehen, mit diesem Einheitsmass verglichen gleich oder entgegengesetzt gleich, und man kann fragen, ob diese Gleichheit auch umgekehrt eine ausreichende Bedingung für die Transformirbarkeit der Punktepaare in einander sei. Um diese Frage genau beantworten zu können, ist es nothwendig, die beiden Punkte, die zu einem gegebenen normal sind, zu unterscheiden.

Bezeichnen wir für einen beliebigen Punkt e einen der beiden zu ihm normalen Punkte als seine „Ergänzung“, so ist der zweite der Diametralpunkt der Ergänzung und wir haben mit dieser willkürlich getroffenen Unterscheidung zugleich für die zu irgend einem Punkte normalen Punkte einen Unterschied festgesetzt. Führen wir nämlich den Punkt e auf einem beliebig zu wählenden Wege, welcher jedoch keinen der unendlich fernen Punkte enthält, in einen beliebigen anderen stetig über, so ändert sich auch die Ergänzung des ersten Punktes stetig, und zwar gelangt man unabhängig von dem Wege immer zu demselben Punkt. Es ist daher unter den beiden zu einem gegebenen normalen Punkten immer eindeutig einer ausgezeichnet, den wir als Ergänzung des gegebenen bezeichnen wollen.

Wir setzen nun das äussere Product, in welchem ein beliebiger (einfacher) Punkt als erster Factor, seine Ergänzung als zweiter

[1] Vergl. die vorige Anmerkung.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Factor steht, gleich Eins. Dann ist das Einheitsmass eindeutig bestimmt; die beiden affinen Transformationen, welche einen Punkt in einen anderen überführen, unterscheiden sich mit Hilfe desselben dadurch, dass bei der einen die äusseren Producte von Punktepaaren, die in einander übergehen, gleich, bei der anderen aber entgegengesetzt sind.

Um nun zu entscheiden, ob Gleichheit der äusseren Producte zweier Punktepaare auch hinreichende Bedingung für ihre Transformirbarkeit in einander ist, drücken wir aus, dass zwei Punkte b und b' mit einem und demselben Punkte a gleiche äussere Producte liefern. Dann ist, wenn

$$a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$$
$$b = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 \qquad b' = \beta' e_0 + \beta'_1 e_1$$
$$\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 = \alpha_0 \beta'_1 - \alpha_1 \beta'_0.$$

Hier kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, noch $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ annehmen, dann aber folgt wegen der Gleichungen:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 = \beta_0'^2 + \beta_1'^2 = 1:$$
$$\beta_1 = \beta_1' \quad \beta_0 = \pm \beta_0'.$$

d. h. b' ist entweder aus e_0 und e_1, oder aus e_0 und $-e_1$ durch dieselben Coëfficienten abgeleitet, wie b aus e_0 und e_1.

Haben daher zwei Punktepaare a, b und a', b' vom Zahlwerth 1 gleiche äussere Producte, so kann entweder a mit a', b mit b' durch eine affine Transformation zur Deckung gebracht werden, oder es ist möglich a mit b' und gleichzeitig b mit dem Diametralpunkt von a' zur Deckung zu bringen. Der obige Satz ist also im Allgemeinen nicht unbedingt umkehrbar. Es ist aber für das Folgende wesentlich zu bemerken, dass, wenn das äussere Product einen sehr kleinen Werth hat, und sich sowohl b von a, als auch b' von a' nur um ein kleines Vielfaches eines anderen Punktes unterscheidet, die zweite der beiden Möglichkeiten fortfällt, so dass dann die Gleichheit der äusseren Producte auch hinreichende Bedingung für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander wird.

Ausser dem Begriffe des äusseren Productes ist für die Massverhältnisse noch der Begriff des inneren Productes von Wichtig-

keit. Dasselbe ist von dem Begriff der Ergänzung, also zugleich mit dieser vom Masswerth abhängig. Bezeichnen wir mit Grassmann als „inneres Product" zweier vielfacher Punkte das äussere Product des einen in die Ergänzung des anderen, so wird der Masswerth eines Punktes gleich seinem „inneren Quadrat."

Das innere Product zweier verschiedener Punkte ändert seinen Werth nicht, wenn man dieselben vertauscht, und es ergibt sich ähnlich wie oben, dass die nothwendige und auch ausreichende Bedingung für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare vom Masswerthe 1 in einander die ist, dass dieselben gleiche innere Producte haben.

Die Gleichung 1) dieses Paragraphes lässt sich bei Einführung dieses Begriffes (in der Grassmann'schen Bezeichnung) einfacher schreiben:

$$\alpha^2 = [\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1]^2$$
$$= \alpha_0^2 a_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 [\alpha_0 a_1] + \alpha_1^2 a_1^2$$

woraus die Bedeutung der Coëfficienten jenes Ausdruckes hervorgeht.

Man kann hiernach die Gleichung für den Ausdruck des Masswerthes unter Einführung beliebiger Grundpunkte sofort hinschreiben. Führt man z. B. die beiden unendlich fernen Punkte

$$\varepsilon = e_1 + ie_2, \quad \varepsilon' = e_1 - ie_2$$

als Grundpunkte ein, so erhält man an Stelle von 2) die Gleichung:

$$2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, e = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon'$$

4.

Der erste der beiden im vorigen Paragraphe über die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander aufgestellten Sätze führt auf einem, wie ich glaube, natürlichen Wege zu dem Begriff des Winkels[1] zweier Punkte und damit zur sogenannten Nicht-Euclidischen Massbestimmung.

[1] Ich wähle diese Bezeichnung für die transcendente Massbestimmung und gebrauche das Wort „Entfernung" nur für den später aufzustellenden algebraischen Ausdruck.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da nämlich für Paare benachbarter Punkte die Gleichheit der äusseren Producte ausreicht, um dieselben in einander überführen zu können, und das äussere Product, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, verschwindet, so liegt es nahe, das Integral zu betrachten, welches der Grenzwerth einer Summe von äusseren Producten unendlich benachbarter Punkte bildet und zu untersuchen, ob dieses Integral ein ausreichendes Kennzeichen für die Transformirbarkeit zweier Punktepaare in einander abgibt.

Ist dies der Fall, so wird man auch umgekehrt das äussere und innere Product zweier Punkte als Functionen des zwischen ihnen als Grenzen genommenen Integrals darstellen können, und zugleich erhält man aus der Art, wie sich zwei von derselben Grenze aus nach entgegengesetzten Richtungen genommene Integrale zusammensetzen, in einfachster Form die Beziehung, welche zwischen den äusseren und inneren Producten von drei Punkten des Gebietes stattfindet.

Zunächst ist ersichtlich, dass dieses Integral sich mit seiner oberen Grenze stetig und eindeutig ändert, so lange diese keinem der unendlich fernen Punkte unendlich nahe kommt.

Denn seien a_0, a_1, a_2, .— a_n eine Reihe von Punkten, welche (in dem durch das Verhältniss der Ableitungszahlen $\alpha_0 : \alpha_1$ dargestellten Werthgebiet) durch einen geschlossenen Weg verbunden sind, der keinen der unendlich fernen Punkte einschliesst, so convergirt nach einem bekannten Satze die Summe

$$(a_0 a_1) + (a_1 a_2) + . \qquad + (a_n a_0)$$

gegen Null, wenn man zwischen die ursprünglichen Punkte immer neue so einschaltet, dass jedes einzelne Glied $(a_k a_{k+1})$ sich schliesslich der Null nähert.

Seien λ_1 und λ_2 bezüglich μ_1 und μ_2 die Ableitungszahlen der Grenzen a und b, zwischen welchen das Integral genommen wird, so genügen diese, wenn man als Grundpunkte normale einfache Punkte wählt den Gleichungen

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^1 = 1 \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$$

und das Integral ist nach Obigem die Differenz der Werthe,

welche eine analytische Function des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ oder des Winkels

$$\text{arc}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \text{arc}\sin\lambda_1 = \text{arc}\cos\lambda_2$$

für die Werthepaare λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 annimmt. Das Differential dieser Function:

$$\lambda_1\, d\lambda_2 - \lambda_2\, d\lambda_1$$

ist aber gleich dem Differential von arc (λ_1, λ_2) selbst, dieselbe kann also, da es sich nur um die Differenz ihrer Werthe handelt, gleich arc (λ_1, λ_2) angenommen werden.

Der unmittelbare Ausdruck der Werthdifferenzen durch das äussere und innere Product der Grenzpunkte der Integration ergibt sich dann aus der Formel

$$\text{arc}\,(\lambda_1, \lambda_2) - \text{arc}\,(\mu_1, \mu_2)$$
$$= \text{arc}\sin(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \text{arc}\cos(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$$

Bezeichnet man dasselbe als den „Winkel" seiner Grenzpunkte, so ergibt sich:

Der Winkel zweier Punkte hat als Sinus das äussere und als Cosinus das innere Product derselben (über seine Vieldeutigkeit vgl. die citirte Abhandlung von Klein). Es erhält den Werth $\frac{\pi}{2}$ für Paare normaler Punkte, den Werth π für Diametralpunkte; er wird unendlich, wenn einer der beiden Punkte in einen der bereits unter dem Namen „unendlich ferne Punkte" eingeführten Punkte vom Zahlwerth Null fällt. Er ist mit der in der Nichteuclidischen Geometrie als „Entfernung" zweier Punkte bezeichneten Zahl identisch. Die affinen Transformationen der Geraden in sich decken sich mit den congruenten und symmetrischen Umformungen der Nichteuclidischen Geometrie.

Die oben erwähnte Gleichung zwischen den äusseren Producten von je drei Punkten ist:

$$\text{arc}\sin[bc] + \text{arc}\sin[ca] + \text{arc}\sin[ab] \equiv 0 \bmod 2\pi$$

Sie ist characteristisch für die der Nichteuclidischen Geometrie entsprechende Form der Ausdehnungslehre.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

5.

Ich wende mich nun zu dem zweiten Fall, wo sich das Quadrat des Zahlwerthes durch ein einziges Quadrat ausdrücken lässt.[1]

Man kann dann die Wurzel ausziehen, wodurch der Ausdruck eines beliebigen Punktes e durch die Grundpunkte die Form annimmt:

$$\alpha e = \alpha e_0 + \beta e.$$

Hier ist e_0 ein beliebig anzunehmender Punkt vom Zahlwerthe 1, e_1 aber ein ausgezeichneter Punkt vom Zahlwerth Null, eine sogenannte „Strecke", welche die Eigenschaft hat, dass beliebige Vielfache derselben, zu einem gegebenen Punkte addirt, denselben in neue Punkte überführen, die alle den nämlichen Zahlwert haben. (Eine Eigenschaft, die den unendlich entfernten Punkten des vorigen Paragraphes, aus denen die Strecke durch Zusammenrücken entsteht, nicht zukommt.) Es ergibt sich sogleich, dass die Summe der Coëfficienten einer Zahlbeziehung, die zwischen beliebig vielen einfachen Punkten besteht, Null ist, und dass es hier nicht wie im allgemeinen Falle einfach unendlich viele, sondern zweifach unendlich viele affine Transformationen gibt. Die Strecke ist der einzige Punkt, der bei allen affinen Transformationen ungeändert bleibt, denn eine solche ist bestimmt, indem man zwei beliebigen Punkten zwei andere willkürlich zuordnet.

Führt man das äussere Product eines Punktes vom Zahlwerthe 1 und der Strecke als Masseinheit für die Grössen zweiter Stufe ein, so ändern sich die äusseren Producte aller Punkte, auf dieses Mass bezogen, bei einer beliebigen affinen Transformation um einen allen gemeinsamen Factor; ist derselbe gleich ± 1, so erhält man eine ausgezeichnete Gruppe von Transformationen, welche bereits bestimmt sind, indem man einem Punkt einen anderen zuordnet. Statt der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehung zwischen den äusseren Producten dreier Punkte

[1] Den Grenzübergang, durch welchen dieser Fall aus dem vorigen entsteht, kann man sich geometrisch z. B. so deutlich machen, dass man den §. 3. Anm. erwähnten Kegelschnitt in ein Paar paralleler Geraden ausarten lässt.

erhält man jetzt einfach:

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0;$$

die äusseren Producte werden unmittelbar addirbar; das Integral über die äusseren Producte benachbarter Punkte ist gleich dem äusseren Product seiner Grenzen und dieses, die „Entfernung" der beiden Punkte vertritt daher die Stelle des Winkels im allgemeinen Falle. Man sieht sogleich, dass die Entfernung zweier Punkte mit der in der Elementargeometrie ebenso genannten Grösse zusammenfällt, und dass die ∞^2 affinen Transformationen mit den Ähnlichkeitsformationen, und die darin enthaltenen ausgezeichneten mit den Verschiebungen, bezüglich symmetrischen Umformungen derselben sich decken; die Strecke ist der unendlich ferne Punkt, der bei allen diesen Transformationen erhalten bleibt.

Die zwischen den äusseren Producten dreier Punkte einer Geraden bestehende Gleichung

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0$$

ist characteristisch für diejenigen Formen der Ausdehnungslehre, welchen im Gebiet zweiter Stufe die parabolische Massbestimmung zugehört.

6.

Wir betrachten jetzt das Gebiet dritter Stufe, und zwar zunächst den Fall, wo sich die Gleichung für den Masswerth auf die Form:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \qquad 1)$$

bringen lässt, ohne dass sich zugleich α^2 als Summe von nur zwei Quadraten darstellen liesse,[1] wo dann also der Ausdruck

[1] Man erhält wieder eine geometrische Deutung, indem man die Punkte des Gebietes auf die Punkte eines Ellipsoides oder Hyperboloides bezieht. Der Fall eines Ellipsoides entspricht der elliptischen, der eines zweischaligen (nicht geradlinigen) Hyperboloides der sogenannten hyperbolischen Geometrie. Die Grenzfälle der beiden folgenden Paragraphen entstehen, wenn die Fläche in einen Cylinder, bezüglich ein Paar paralleler Ebenen ausartet.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eines beweglichen Punktes durch die Grundpunkte die Form

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}\; e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad 2)$$

annimmt. Jeder Punkt ist, dem doppelten Vorzeichen der Wurzel entsprechend, auch hier wieder durch zwei „Diametralpunkte" vertreten, und das Gebiet dritter Stufe ist demnach mit zwei Blättern überdeckt zu denken, welche längs des Ortes der Punkte vom Zahlwerth Null zusammenhängen. Die Letzteren, die wir auch hier als unendlich ferne Punkte bezeichnen, erfüllen eine Curve II. Ordnung, d. h. ihr Ort hat mit jeder Geraden zwei Punkte gemein.

Leitet man alle Punkte der Geraden aus zweien derselben ab, so kann man den Ausdruck für den Masswerth eines auf der Geraden beweglichen Punktes auf die Form 2) des §. 3 bringen, und man kann daher die dort gemachten Schlüsse ohne Weiteres übertragen. Da die Gesammtheit der unendlich fernen Punkte bei jeder affinen Transformation ungeändert bleibt, und auch Paare normaler Punkte wieder in solche übergehen, so ergibt sich:

„Auf jeder Geraden, welche zwei getrennte unendlich ferne Punkte enthält, gibt es ein natürliches Einheitsmass, das äussere Product zweier normaler einfacher Punkte. Zwei Punkte können dann und nur dann durch eine affine Transformation in zwei andere übergeführt werden, wenn ihre Winkel, bezogen auf die zugehörigen Einheitsmasse, in beiden Fällen dieselben sind."

Die Punkte e_0, e_1, e_2 der Gleichung 2) sind paarweise zu einander normal, und je drei paarweise zu einander normale Punkte besitzen die Eigenschaft, als Grundpunkte eingeführt mit einem beliebigen Punkte durch eine Gleichung von der Form 2) verbunden zu werden. Jedes solche Punkttripel (Poldreieck der Curve II. O.) kann durch eine affine Transformation in jedes andere verwandelt werden, denn die Gleichung 2) nimmt für alle dieselbe Form an, und man erhält die Gesammtheit aller affinen Transformationen, indem man ein beliebiges derselben der Reihe nach allen andern zuordnet.

Es gibt einfach unendlich viele Gerade, deren unendlich entfernte Punkte zusammenfallen, und deren Gesammtheit daher bei allen affinen Transformationen in sich selbst übergeführt wird.

Die unendlich fernen Punkte derselben besitzen die Eigenschaft der Strecken des §. 5, zwei Punkte einer solchen Geraden können durch eine affine Transformation (des Gebietes dritter Stufe) immer in zwei beliebige andere übergeführt werden.

Auf ihnen gibt es also kein natürliches Einheitsmass, und man darf auch kein solches einführen (vgl. §. 5), wenn man nicht, die Zahl der anzuwendenden Transformationen willkürlich einschränken will.

Alle zu einem gegebenen Punkte a normalen Punkte erfüllen eine Gerade, da, wie man sich leicht überzeugt, ein zu zwei anderen normaler Punkt auch normal ist zu jedem Punkte des die letzteren verbindenden Gebietes. Wir bezeichnen nun das äussere Product zweier zu einander normaler einfacher Punkte dieses Gebietes als „Ergänzung“ $|a$ des einfachen Punktes a, und dem entsprechend als Ergänzung des vielfachen Punktes αa die Grösse $\alpha|a = |\alpha a$, wobei wir das Vorzeichen derselben für einen Punkt willkürlich annehmen und die Vorzeichen aller übrigen dann wie in §. 3 durch die Bedingung bestimmen, dass mit stetiger Änderung von a auch die Ergänzung dieses Punktes sich stetig ändern soll.

Dann bestehen zwischen den Ergänzungen beliebiger Punkte dieselben Zahlbeziehungen, wie zwischen den Punkten selbst.

Sind nämlich $\alpha_0 a_0$, $\alpha_1 a_1$, $\alpha_2 a_2$ drei Punkte einer Geraden, so stehen diejenigen drei zu ihnen normalen Punkte $\alpha_0 b_0$, $\alpha_1 b_1$, $\alpha_2 b_2$ der Geraden, welche sie in dem §. 3 festgesetzten Sinne ergänzen, in derselben Zahlbeziehung wie $\alpha_0 a_0$, $\alpha_1 a_1$, $\alpha_2 a_2$ selbst. Ist nun c der zu der Geraden normale einfache Punkt, so sind $[cb_0]$, $[cb_1]$, $[cb_2]$ die Ergänzungen der Punkte a_0, a_1, a_2 da c zu b_0, b_1, b_2 normal ist und bei stetiger Überführung von a_0 in a_1 und a_2 $[cb_0]$ in $[cb_1]$ bezüglich $[cb_2]$ übergeht. (§. 3). Man erhält also die zwischen $|\alpha_0 a_0$, $|\alpha_1 a_1$, $|\alpha_2 a_2$ bestehende Zahlbeziehung, indem man die zwischen $\alpha_0 b_0$, $\alpha_1 b_1$, $\alpha_2 b_2$ bestehende Gleichung äusserlich mit c multiplicirt: woraus hervorgeht, dass die Coëfficienten der zwischen den ursprünglichen Punkten und ihren Ergänzungen bestehenden Zahlbeziehungen dieselben sind.

Alle für die ursprünglichen Punkte aufgestellten Begriffe und Sätze lassen sich daher auf deren Ergänzungen unmittelbar übertragen. Es übertragen sich also die Begriffe des Normalen, des

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

inneren Productes, des Winkels u. s. w. nunmehr auch auf Grössen zweiter Stufe (Linientheile).

Als Ausdruck für den Masswerth einer Grösse zweiter Stufe, welche mittelst der Zahlen $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$ aus drei paarweise zu einander normalen Linientheilen abgeleitet ist, erhält man aus dem entsprechenden Ausdrucke für Punkte:

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Es gibt also auch unendlich viele Linientheile vom Masswerthe Null, die Ergänzungen der Punkte vom Masswerth Null: Sie stellen die bereits betrachteten Geraden dar, für welche die unendlich fernen Punkte zusammenfallen.

In dem obigen Satze ist die vollkommene Reciprocität aller Verhältnisse ausgesprochen, in welcher Punkte einerseits und Linientheile anderseits zu einander treten können.

Dieselbe erstreckt sich aber auch noch auf solche Beziehungen, in welchen Punkte und Linientheile gleichzeitig vorkommen, ein Verhältniss, das in den Eigenschaften der hier sich naturgemäss darbietenden regressiven Multiplication [1] seinen einfachsten Ausdruck findet.

Wählt man nämlich nicht die Punkte, sondern die Linientheile des Gebietes als Ausgangselemente, so wird man auch auf diese (wie auf alle extensiven Grössen) den Begriff der äusseren Multiplication anwenden können.

Das äussere Product zweier Linientheile wird dann ein vielfaches ihres Durchschnittspunktes; es ist dualistisch zu dem äusseren Product der Punkte, deren Ergänzungen jene Linientheile sind. Betrachtet man nun die zu multiplicirenden Linien-

---

[1] Die zweckmässigere Darstellung dieser Operation hat Grassmann in der ersten Bearbeitung seiner Ausdehnungslehre gegeben, da dort der lineare (projective) Character dieser Multiplicationsart unmittelbar hervortritt und nicht nachträglich bewiesen zu werden braucht. Die hier benutzte Definition des regressiven Productes stimmt mit der von Grassmann in A_2 angegebenen überein. Der letztere Weg ist der pädagogisch einfachere, und wahrscheinlich derjenige, auf welchem Grassmann zu diesem für die Ausdehnungslehre und ihre geometrischen Anwendungen so wichtigen Begriffe gelangt ist.

theile selbst wieder als durch äussere Multiplication von Punkten entstanden, und dehnt den Begriff der Ergänzung (wie es bei der Dualität aller Verhältnisse möglich ist) auch auf Linientheile aus, so geht diese Art der Multiplication in eine (formell) andere über, die „regressive" Multiplication, welche dadurch bestimmt ist, dass die Ergänzung des regressiven Productes zweier Linientheile gleich dem äusseren („progressiven") Producte der Ergänzungen der Linientheile gesetzt wird.

Wir haben bisher den Ausdruck für den Winkel zweier Punkte nur dadurch erhalten, dass wir das dieselben verbindende Gebiet zweiter Stufe als Hauptgebiet einführten, und dann die Bestimmungen von §. 3 und §. 4 anwendeten. Als Ausdruck des Winkels zweier Punkte ergab sich so ein Bogen, dessen Cosinus das auf jenes Hauptgebiet bezogene innere Product der beiden Punkte war.

Es wird nun möglich, den Winkel unmittelbar zu bestimmen durch die Bemerkung, dass der Werth dieses inneren Productes gleich ist dem äusseren Producte des einen der Punkte in die Ergänzung des anderen, wenn man wieder das Gebiet dritter Stufe als Hauptgebiet annimmt und das äussere Product dreier zu einander normaler einfacher Punkte (oder, was dasselbe ist, eines Punktes und seiner Ergänzung) gleich der Einheit setzt.

Als inneres Product zweier Punkte bezeichneten wir nämlich im Gebiet zweiter Stufe das äussere Product des einen und der Ergänzung des anderen, wobei als Masseinheit das äussere Product eines beliebigen Punktes und seiner Ergänzung diente.

Diese beiden äusseren Producte sind aufeinander fallende Linientheile und die zwischen ihnen bestehende Zahlbeziehung bleibt erhalten, wenn man beide äusserlich mit der Ergänzung des letzteren im Gebiet dritter Stufe multiplicirt.

Führt man für das äussere Product einer Grösse und der Ergänzung eines anderen die Bezeichnung „inneres Product" ein, so ergibt sich demnach, dass der „Winkel" zweier einfacher Punkte oder Linientheile einem Bogen gleich ist, dessen Cosinus von dem inneren Producte derselben gebildet wird. Der Masswerth eines Punktes oder Linientheiles wird gleich dessen innerem Quadrat. Da dasselbe für die unendlich fernen Punkte und Geraden verschwindet, findet man den Winkel zweier Punkte, die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

auf einer unendlich fernen Geraden liegen, gleich Null, ebenso wie der Winkel zweier Geraden, die sich in einen unendlich fernen Punkt schneiden. („Parallele" Punkte und Gerade.)

Wir brauchen nach alledem kaum noch ausdrücklich hervorzuheben, dass die sich so ergebende, auf dem Begriffe des inneren Productes beruhende Massgeometrie mit der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel, oder der allgemeinen auf einen irreducibeln Kegelschnitt sich beziehenden projectiven Massbestimmung zusammenfällt.

Die affinen Transformationen des Gebietes entsprechen den Drehungen der Kugel, beziehungsweise den Bewegungen der nichteuclidischen Ebene. Es sind dies die „circulären Änderungen" Grassmann's.

7.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Falles, wo sich der Masswerth eines Punktes durch eine Summe von zwei Quadraten ausdrücken lässt, ohne dass schon ein einziges Quadrat hierzu ausreichte.[1]

Wir nehmen an, es sei

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}\, e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \qquad 1)$$

wo also der Masswerth des beweglichen Punktes e von der Ableitungszahl eines der drei Grundpunkte unabhängig wird.

Er wird gleich dem Masswerth der Zurückleitung des Punktes auf das Gebiet der beiden anderen Grundpunkte, wenn man für diese die §. 3 getroffene Bestimmung einführt, und alle Punkte, die sich nur um Vielfache des letzten Punktes e_2 unterscheiden, haben daher denselben Masswerth.

Der „Winkel" zweier Punkte wird gleich dem Winkel ihrer bezüglichen Zurückleitung auf das Gebiet der Punkte e_0 und e_1:

Alle Punktepaare, für welche diese Zurückleitungen gleich sind, bilden mit einander denselben Winkel und man kann daher aus irgend zwei Punkten unendlich viele andere Paare ableiten,

[1] Es ist vielleicht nützlich, schon hier zu bemerken, dass dieser Fall der elementaren Geometrie dualistisch gegenübersteht. Es konnte die letztere selbst hier nicht zur Betrachtung kommen, wollten wir nicht an dieser Stelle statt der Punkte die Linientheile als Ausgangselemente einführen.

die alle denselben Winkel haben, indem man sie um beliebige Vielfache von e_2 linear ändert.

Zwischen den Winkeln von irgend drei Punkten besteht die nämliche Beziehung wie zwischen denen von drei Punkten einer Geraden, ihre Summe ist also congruent Null mod. 2π.

[In der elementaren Geometrie ist die Summe der „Winkel" im Dreieck $= \pi$. Unterscheidet man aber die Richtungen einer Geraden — was der hier getroffenen Unterscheidung der Diametralpunkte entspricht — und bezeichnet als „Winkel" zweier Geraden diejenigen beiden Winkel, welche von positiven Richtungen begrenzt werden, so ergänzen sich dieselben zu 2π; ordnet man dann den drei Seiten eines Dreieckes beliebige Richtungen zu, so tritt entweder an Stelle eines der drei Innenwinkel des Dreiecks sein Nebenwinkel oder alle drei Winkel werden durch ihre Nebenwinkel ersetzt; und die Summe der Winkel wird dann gleich Null oder 2π. Dass die letztere Bezeichnungsart zweckmässiger ist als die in der elementaren Geometrie immer noch übliche, ist, wenn ich nicht irre, bereits von Möbius, dann von Grassmann (A_2 Nr. 340 Anmerkung) hervorgehoben worden.]

Die unendlich entfernten Punkte vom Masswerth Null erfüllen zwei gerade Linien, welche den Punkt e_2 enthalten.

Die Gesammtheit aller affinen Transformationen erhält man, indem man den Ausdruck eines beweglichen Punktes durch drei feste auf alle möglichen Arten auf die Form der Gleichung 1) bringt und dann irgend eines der so entstehenden Punkttripel e_0 e_1 e_2 nach einander allen anderen zuordnet. Man erhält daher, weil e_2 allen diesen Tripeln gemeinsam ist, und das Paar normaler Punkte e_0, e_1 wieder in ein solches übergehen muss, alle affinen Transformationen, in dem man zuerst das Gebiet von e_0 und e_1 affin transformirt, zu jedem der hierdurch aus e_0 und e_1 entstehenden Punkte ein beliebiges Vielfaches von e_2 fügt und den Punkt e_2 selbst mit einer beliebigen Zahl multiplicirt. Leitet man aus den auf diese Weise neu entstandenen Punkten e'_0 e'_1 e'_2 alle Punkte des Gebietes ab, und setzt zwei Punkte e und e' entsprechend, wenn e mit e_0 e_1 e_2 durch dieselbe Gleichung verknüpft ist, wie e' mit e'_0 e'_1 e'_2, so ist durch diese Beziehung die allgemeinste affine Transformation hergestellt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man sieht sogleich, dass man auf diese Art bewirken kann, dass drei gegebene Punkte in drei beliebige andere übergehen, welche paarweise mit einander dieselben Winkel bilden. Die äusseren Producte von drei entsprechenden Punkten erhalten hierbei im Allgemeinen einen constanten Factor und man kann auch hier wieder, wie im Gebiet zweiter Stufe diejenigen Transformationen auszeichnen, für welche derselbe gleich Eins ist. Es sind dies dieselben, für welche der Factor, mit welchem der Punkt e_2 multiplicirt wird, den Werth Eins hat. Da bei ihnen demnach je zwei Punkte, welche um ein Vielfaches des Punktes e_2 verschieden sind, in zwei andere übergehen, welche sich um dasselbe Vielfache von e_2 unterscheiden, so kann man, wenn man sich auf diese besonderen Transformationen beschränkt, auch für die den Punkt e_2 enthaltenden Gebiete zweiter Stufe eine Massbestimmung einführen, in welcher der Punkt e_2 offenbar den Character einer Strecke hat.

Wir bezeichnen solche Punktepaare als „parallel“ und das Vielfache von e_2, um welches sie sich unterscheiden, als die „Entfernung“ oder den „Abstand“ der parallelen Punkte.

Der Ausdruck für den Masswerth der Grössen zweiter Stufe hat (§. 2) der Bedingung zu genügen, dass er bei allen affinen Transformationen ungeändert bleibt.

Es müssen also, wenn zwei Punktepaare vom Masswerth 1 in einander transformirt werden können (gleiche Winkel haben), auch die Masswerthe der entsprechenden äusseren Producte einander gleich sein — eine Bedingung, durch welche der Masswerth bereits völlig bestimmt ist, wenn wir noch hinzufügen, dass das äussere Product zweier normaler Punkte den Masswerth 1 erhalten soll.

Wählen wir nämlich als Grundeinheiten zweiter Stufe die äusseren Producte der oben angeführten Grundpunkte e_0, e_1, e_2 also die Linientheile $[e_0\ e_1]$, $[e_0\ e_2]$ $[e_1\ e_2]$, so ist nach unserer Annahme der Masswerth von $[e_0\ e_1]$ gleich Eins; weil aber auch e_0 und $e_1 + \lambda e_2$ ein Paar normaler Punkte bilden, ist auch der Masswerth von $[e_0\ (e_1 + \lambda e_2)]$ unabhängig von λ gleich Eins, also der Masswerth von $[e_0\ e_2]$ und ebenso von $[e_1\ e_2]$ gleich Null.

Irgend ein Linientheil g wird daher mit den Grundeinheiten durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha g = \alpha[e_0\, e_1] + \beta[e_0\, e_2] + \gamma[e_1\, e_2] \qquad 2)$$

verbunden: Lässt sich der Ausdruck für das Quadrat des Masswerthes der Grössen erster Stufe im Gebiete dritter Stufe als eine Summe von zwei Quadraten darstellen, so wird der entsprechende Ausdruck für Grössen zweiter Stufe ein einziges Quadrat.

Alle „unendlich fernen" Geraden vom Masswerthe Null:

$$\beta[e_0\, e_2] + \gamma[e_1\, e_2)$$

deren Ort der Punkt e_2 ist, besitzen in diesem Falle die Streckeneigenschaft, und die Massbestimmung für alle Geraden desselben Büschels fällt zusammen mit der in §. 5 aufgestellten.

Da nämlich, wie man leicht sieht, durch eine affine Transformation zwei gegebene Gerade in zwei beliebige andere übergeführt werden können, so ist hier wie dort die Entfernung zweier Geraden unbestimmt, so lange man die Gesammtheit aller affinen Transformationen zu Grunde legt. Zeichnet man dagegen die schon oben betrachteten Transformationen aus, für welche das Product $[e_0\, e_1\, e_2]$ seinen Werth (Eins) beibehält,[1] so ist damit für irgend zwei Gerade eine Zahl bestimmt, deren Gleichheit für zwei Geradenpaare die Bedingung dafür ist, dass dieselben durch eine jener besonderen Transformationen in einander übergeführt werden können, und welche demselben Gesetze folgt wie der in §. 5 aufgestellte Begriff der Entfernung zweier Punkte. Seien nämlich c der Schnittpunkte der beiden (einfachen) Geraden g' und g'', e' und e'' die zu c ergänzenden Punkte derselben, so sind die letzteren zu einander parallel, und ihr Abstand ist eine Grösse, die bei diesen Transformationen erhalten bleibt (s. oben), welche also für je zwei in einander überführbare Geradepaare denselben Werth haben muss.

Dieselbe ist aber für alle Geraden $[ee']$, $[ee'']$, $[ee''']$. eines Büschels e den äusseren Producten $[e'e''].[e'e''']\ldots$ proportional, diese aber den Masswerthen der regressiven Producte $[g'.g''] = [ee'.ee''] = [ee'\, e'']e$.

[1] Dies ist an sich willkürlich. Die allgemeinere Annahme würde zu dem dualistischen Gegenstück der Helmholtz'schen Geometrie führen, welche ja mit der elementaren Geometrie die Massbestimmung im Strahlenbüschel gemein hat. Wir erhalten aber das Axiom der Monodromie auch für die Massbestimmung der Grössen zweiter Stufe aufrecht.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zwischen diesen Producten selbst besteht daher die Gleichung

$$[g''.g'''] + [g'''.g'] + [g'g''] = 0$$

und wir dürfen (§ 5) den Masswerth des Productes $[g'.g'']$ unmittelbar als „Entfernung“ der Geraden g' und g'' einführen. [1]

Dieselbe verschwindet, wenn die beiden Geraden sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden (falls nicht eine der Geraden eine „unendlich ferne“ vom Masswerth Null ist).

Aus der Gleichheit aller analytischen Ausdrücke geht hervor, dass die hier kurz gekennzeichnete Geometrie sich von der elementaren ebenen Geometrie nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Punktes die Gerade und umgekehrt getreten ist. Zu derjenigen Form der Ausdehnungslehre im Gebiet dritter Stufe, bei welcher das Quadrat des Masswerthes der Linientheile durch eine Summe von zwei ($n-1$ im allgemeinen Fall) Quadraten ausgedrückt wird, gehört eine Massgeometrie, welche in ihren Gesetzen mit der Euclidischen zusammenfällt.

Den ∞^4 (für die Linientheile) affinen Transformationen des Gebietes entsprechen die Ähnlichkeitstransformationen, der Untergruppe von ∞^3 Transformationen die congruenten und symmetrischen Umformungen der elementaren ebenen Geometrie.

8.

Nehmen wir endlich an, das Quadrat des Masswerthes sei ein vollständiges Quadrat. Dann können wir die Wurzel ausziehen und erhalten bei Einführung geeigneter Grundpunkte die einen veränderlichen Punkt mit drei festen Punkten verbindende Gleichung in der Form:

$$\alpha_0 e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \qquad 1)$$

[1] Auf etwas mehr rechnerischem Wege kann man zu demselben Resultat auch so gelangen:

Es sei $e = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_4 + \alpha_2 e_2$ $(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1)$ der Schnittpunkt von g' und g'', ferner etwa

$$e' = -\alpha_1 e_0 + \alpha_0 e_1 + \alpha'_2 e_2$$
$$e'' = -\alpha_1 e_0 + \alpha_0 e_1 + \alpha''_2 e_2$$

die zu e ergänzenden Punkte e' und e'' beider Geraden. Dann wird

$$g' = [ee'] = [e_0 e_1] + (\alpha_0 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha_1)[e_0 e_2] + (\alpha_1 \alpha'_2 - \alpha_2 \alpha_0)[e_1 e_2]$$
$$g'' = [ee''] = [e_0 e_1] + (\alpha_0 \alpha''_2 + \alpha_2 \alpha_1)[e_0 e_2] + (\alpha_1 \alpha''_2 - \alpha_2 \alpha_0)[e_1 e_2]$$
$$[g'g''] = [ee'e''] e = (\alpha''_2 - \alpha'_2) e,$$

woraus unmittelbar die im Text angegebene Gleichung folgt.

Hier sind e_1 und e_2 Strecken, deren beliebige Vielfache zu einem gegebenen Punkt hinzugefügt, diesen in einen neuen Punkt vom gleichen Zahlwerth verwandeln, und welche innerhalb ihres Gebietes durch lineare Verbindungen derselben ersetzt werden können; e_0 ist dagegen ein beliebiger Punkt vom Masswerth Eins, der auch durch eine beliebige lineare Verbindung derselben mit den Strecken vertreten werden kann.

Die Anzahl der affinen Transformationen ist, wie in den früheren Fällen, so gross als die Zahl der möglichen Punktetripel e_0, e_1, e_2, auf welche als Grundpunkte bezogen der Ausdruck für den beweglichen Punkt die Form der Gleichung 1) annimmt, also ∞^6: Man erhält dieselben, indem man drei Punkten drei beliebige andere zuordnet. Ähnlich wie im Gebiet zweiter Stufe im entsprechenden Falle (§. 5) wird auch hier die Summe der Coëfficienten jeder Zahlbeziehung, welche zwischen einfachen Punkten besteht, gleich Null.

Der Masswerth der Grössen zweiter Stufe wird auch hier unbestimmt, falls man die Gesammtheit der affinen Transformationen zu Grunde legt; man kann aber wie früher zu bestimmten Ausdrücken für deren Masswerth gelangen, wenn man eine in der Gesammtheit enthaltene Untergruppe auszeichnet.

Es ist nun leicht zu sehen, dass dies nur auf zwei Arten geschehen kann.

Der Ausdruck für den Masswerth der Grössen zweiter Stufe ist nämlich nach §. 2 durch eine Function zweiten Grades der Ableitungszahlen gegeben, welche entweder auf eine Summe von drei oder zwei Quadraten oder auf ein einziges Quadrat sich zurückführen lässt. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da dann nach §. 6 der Ausdruck für den Masswerth der Punkte kein vollständiges Quadrat sein kann. Die zweite Annahme, welche möglich ist, führt uns auf die Untersuchung des vorigen Paragraphes zurück, und wir haben daher allein noch den durch die dritte Annahme gegebenen Fall zu untersuchen, in welchem der Ausdruck für den Masswerth sowohl der Punkte als auch der Linientheile linear ist.

Derselbe kann nach dem Früheren auf die Form gebracht werden, dass er unmittelbar gleich der Ableitungszahl eines der drei Grundpunkte, beziehungsweise einer der drei Grundlinien

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wird; und wir haben wieder zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, je nachdem der ausgezeichnete Punkt und die ausgezeichnete Gerade — die wir als „Hauptpunkt“ und „Hauptlinie“ bezeichnen wollen, in einander fallen oder nicht.

Die letztere Annahme, welche wir als die allgemeinere zuerst untersuchen wollen, können wir analytisch dadurch ausdrücken, dass wir einen beweglichen Punkt e und eine bewegliche Gerade g mit drei festen Punkten e_0, e_1, e_2 durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \alpha_0 e &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ \beta_0 g &= \beta_0 [e_1 e_2] + \beta_1 [e_2 e_0] + \beta_2 [e_0 e_1] \end{aligned} \qquad 1)$$

in Verbindung setzen.

Es gibt dann augenscheinlich noch ∞^6 affine Transformationen, welche man erhält, indem man die Punkte e_1 und e_2 durch beliebige lineare Verbindungen derselben ersetzt. Sie sind eindeutig bestimmt, sobald man zwei gegebenen Punkten irgend zwei andere zuordnet. Unter ihnen sind diejenigen ausgezeichnet, für welche das Product des Hauptpunktes e_0 und der Hauptlinie $[e_1 e_2]$ seinen Werth, den wir gleich der Einheit annehmen dürfen, beibehält; es sind diejenigen, bei welchen das die Punkte e_1 und e_2 in der Gleichung 1) vertretende Punktepaar aus e_1 und e_2 durch lineare Änderung (A_2. Nr. 76) entstehen kann.

Hierbei geht ein Punktepaar a, b in ein anderes a', b' über, dessen äusseres Product mit dem Hauptpunkte e_0 denselben Werth hat, wie das entsprechende der ersten Punkte; und umgekehrt ist die Gleichheit dieser Producte auch hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Punktepaare durch eine Transformation der letzteren Art zur Deckung gebracht werden können.

Da nun zwischen den äusseren Producten von irgend drei Punkten einer Geraden a, b, c die Beziehung

$$[bc] + [ca] + [ab] = 0$$

besteht, so erhält man eine Gleichung derselben Form auch zwischen den Producten der drei Punktepaare mit e_0, und wir können daher die Zahl $[e_0 ab]$ unmittelbar als „Entfernung“ des Punktes b vom Punkte a einführen. Diejenigen Transforma-

tionen, bei welchen dieselbe für alle Punktepaare ungeändert bleibt, bezeichnen wir als „Bewegungen“ der Ebene, diejenigen, welche sie in ihren entgegengesetzten Werth verwandeln, als „symmetrische“ Umformungen.

Im Folgenden wollen wir nun die unter Zugrundelegung dieser Begriffe sich ergebende Massgeometrie etwas ausführlicher untersuchen, als die bisher behandelten Geometrieen, da sie nicht wie diese aus anderen Gesichtspunkten bereits untersucht worden ist.[1]

Der für die Entfernung zweier Punkte angenommene Ausdruck, welcher in dieser Geometrie auch seinem Vorzeichen nach unzweideutig bestimmt ist, zeigt sofort, dass der Ort aller Punkte, welche von einem beliebigen Punkte, der weder der Hauptpunkt ist, noch auf der Hauptlinie liegt, eine gegebene Entfernung besitzen, eine gerade Linie ist.

Dieselbe geht, wenn die Entfernung Null ist, sowohl durch den gegebenen Punkt als auch durch den Hauptpunkt; letzterer besitzt von allen Punkten des Gebietes die Entfernung Null. Jeder Punkt der Hauptlinie ist von allen Punkten des Gebietes unendlich entfernt, mit Ausnahme derjenigen Punkte, welche seiner Verbindungslinie mit dem Hauptpunkte angehören; von diesen ist er um eine unbestimmte Grösse entfernt.

Die beiden Geraden, deren Punkte von einem gegebenen Punkt c entgegengesetzt gleiche Entfernungen $+k$ und $-k$ haben:

---

[1] Man kann sich von dieser Geometrie eine anschauliche Vorstellung mit Hilfe einer auf die euclidische Geometrie bezüglichen Deutung derselben bilden. Man erhält dieselbe, wenn man einen festen Punkt auszeichnet, und als „Entfernung“ zweier Punkte a, b (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) den Inhalt des Dreieckes definirt, welches dieselben mit dem festen Punkte zusammen einschliessen. Die „Bewegungen“ und „symmetrischen Umformungen“ der Ebene sind dann diejenigen im Sinne der elementaren Geometrie affinen Transformationen (d. h. lineare Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen), die den Punkt c_0 ungeändert lassen und alle Figuren in flächengleiche Figuren verwandeln. Mit Hilfe dieser Vorstellung kann man sich die im Text angegebenen Sätze leicht constructiv deutlich machen. Ebenso die im §. 10 angegebenen Sätze, wenn man als Hauptlinie und Hauptpunkt die unendlich ferne Gerade und einen Punkt auf derselben wählt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$[e_0 e] - k[e_1 e_2]$$

und

$$[e_0 e] + k[e_1 e_2],$$

schneiden sich auf der Hauptlinie in dem Punkt $[e_0 e . e_1 e_2]$, welcher von e unbestimmt entfernt ist.

Bezeichnen wir ein solches Linienpaar als „Kreis", ihren Durchschnittspunkt als „Scheitel" des Kreises, den Punkt e als „Mittelpunkt" sowohl des Kreises, als auch jeder der beiden Geraden, aus welchen der Kreis besteht, die zugehörige Entfernung als „Radius", endlich Gerade, welche sich auf der Hauptlinie schneiden, als „parallel", so ergibt sich:

„Alle Geraden, die einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkt haben, bilden die Strahlen eines Büschels paralleler Geraden, welches die Hauptlinie und die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Hauptpunkt enthält. Jede Gerade hat unendlich viele Mittelpunkte, deren Ort diejenige gerade Linie ist, welche den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und der Hauptlinie mit dem Hauptpunkte verbindet."

Bezeichnen wir den Ort der letzteren als „Mittellinie", so folgt weiter:

„Jeder Kreis zerfällt in zwei parallele gerade Linien, welche durch die Hauptlinie und die Mittellinie des Kreises — oder der beiden Geraden, aus denen er besteht — harmonisch getrennt sind."

„Alle Kreise mit demselben Mittelpunkt haben auch eine gemeinschaftliche Mittellinie, und also alle ihre Mittelpunkte gemeinsam; sie bilden einen Büschel von Kreisen mit gemeinschaftlichem Scheitel, unter dessen Kreisen sich zwei doppelt zählende Gerade befinden, die Mittellinie des Büschels und die Hauptlinie."

9.

Von der Entfernung zweier Geraden können wir, bei der vollkommenen Dualität der Bestimmungsgleichungen 1) im §. 8 im Voraus sagen, dass ihr analytischer Ausdruck dem regressiven Product der Geraden mit der Hauptlinie proportional sein muss. Und in der That erhält man, wenn man

den Begriff der Entfernung gerader Linien aus dem der Entfernung von Punkten ableitet, diesen Ausdruck.

Zunächst nämlich geht aus der Definition der Entfernung von Punkten sofort hervor, dass das äussere Product $[ab]$ zweier Punkte, wenn b von a die Entfernung $+1$ hat, eine Gerade vom Masswerth 1 ist, und dass umgekehrt jede Gerade, wenn der Punkt a in ihr gegeben ist, auf nur eine Art so dargestellt werden kann.

Sind also g, g', g'' drei Gerade, die durch denselben Punkt a gehen, so kann man die Punkte b, b', b'' eindeutig so bestimmen, dass sie von a die Entfernung $+1$ haben, und

$$g = [ab] \quad g' = [ab'] \quad g' = [ab'']$$

wird. Die Entfernungen der Punkte b, b', b'' nun bleiben bei allen Bewegungen ungeändert und man hat in der Gleichheit der entsprechenden Entfernungen die Bedingung dafür, dass ein Geradenpaar in ein anderes durch eine Bewegung übergeführt werden kann. Da aber b, b', b'' in einer Geraden liegen, so ist die Summe der Entfernungen dieser Punkte gleich Null, und die Entfernungen der zugehörigen Geraden werden den Entfernungen dieser Punkte gleich oder doch proportional.

Man hat also unter der ersten Annahme als Ausdruck für die Entfernung der Geraden g und g' die Grösse

$$\begin{aligned}[e_0 b b'] &= [a b b'] = [a b b'] [a e_1 e_2] \\ &= [a b . a b' . e_1 e_2] = [g g' . e_1 e_2]\end{aligned}$$

Man kann daher Alles, was von der Entfernung von Punkten gesagt wurde, sofort dualistisch auf die von geraden Linien übertragen, wobei natürlich der Hauptpunkt und die Hauptlinie ihre Stelle wechseln. Bezeichnen wir die zum Kreis dualistische Figur als „Zirkel“ und übertragen wir ebenso die andern bisher aufgestellten Begriffe, so erhält man neue Eigenschaften der als „Kreis“ bezeichneten Figur:

„Der Ort aller Geraden, welche von einer beliebigen Geraden, die weder die Hauptlinie ist, noch durch den Hauptpunkt geht, eine gegebene Entfernung besitzen, ist ein Punkt, dessen Verbindungslinie mit dem Hauptpunkt durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und der Hauptlinie geht. Die Hauptlinie hat von den anderen Geraden die Entfernung Null, mit Ausnahme

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Geraden des Hauptpunktes, welche von ihr um eine unbestimmte Grösse entfernt sind. Jede Gerade des Hauptpunktes ist von den anderen Geraden unendlich entfernt, wiederum mit Ausnahme derjenigen, welche mit ihr und der Hauptlinie in einem Büschel liegen. Je zwei Punkte einer Geraden, deren Strahlen von derselben entgegengesetzte Entfernungen $+k$ und $-k$ haben, sind Mittelpunkte der Geraden in dem §. 8 definirten Sinne. Sie bilden zusammen einen Zirkel, dessen „Scheitellinie" durch den Hauptpunkt geht. Alle zu derselben Geraden gehörigen Zirkel bilden eine involutorische Punktreihe, deren Träger ihre gemeinsame Scheitellinie ist (welche zugleich die Mittellinie der Geraden vorstellt) und deren Doppelelemente der Schnittpunkt der letzteren mit der Hauptlinie und der Hauptpunkt sind."

Endlich können wir auch die Construction, durch welche wir zum Begriff der Entfernung zweier Geraden gelangten, dualistisch übertragen: „Construirt man diejenigen beiden Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, und von der Verbindungslinie derselben die Entfernung $+1$ haben, so ist ihre Entfernung gleich der in demselben Sinne genommenen Entfernung der beiden Punkte."

In dem Vorstehenden sind alle Hilfsmittel gegeben, um die Gesetze dieser Art von Geometrie in einer ähnlichen Weise zu entwickeln, wie es in der elementaren Geometrie geschieht.

Als einfachste Anwendung seien nur noch die Formeln angegeben, welche aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes die übrigen zu berechnen gestatten.

Es seien a, b, c; α, β, γ die Entfernungen der Ecken, beziehungsweise der Seiten des Dreiecks; dann sind bei gehöriger Wahl der Vorzeichen diese Grössen untereinander und mit dem Inhalt J des Dreiecks und der zu dem Inhalt dualistischen Grösse J' (dem halben regressiven Product der Seiten) durch die Formeln verbunden:

$$2J = a + b + c = bc\alpha = ca\beta = ab\gamma$$
$$2J' = \alpha + \beta + \gamma = \beta\gamma a = \gamma\alpha b = \alpha\beta c,$$

woraus noch:

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma = J : J'$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{4J^2}{abc}.$$

Diese Formeln reichen aus, um von den sechs Stücken $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ aus drei gegebenen die übrigen und J, J' eindeutig zu berechnen.

Aus der ersten derselben geht hervor, dass die gerade Linie in dieser Geometrie nicht der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist, indem das Problem der geodätischen Linien hier gegenstandslos wird.

10.

Die zweite der im §. 8 gemachten Annahmen endlich können wir allgemein durch die Voraussetzung befriedigen, dass die Ausdrücke für den Masswerth der Punkte und Linientheile durch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} \alpha_1 e &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ \beta_0 g &= \beta_0 [e_1 e_2] + \beta_1 [e_2 e_0] + \beta_2 [e_0 e_1] \end{aligned} \qquad 1)$$

gegeben seien.

Die Gesammtheit der für Punkte und Linientheile gleichzeitig affinen Transformationen erhält man, wenn man in diesen Gleichungen den Punkt e_0 ungeändert lässt, e_2 durch eine lineare Verbindung von e_0 und e_2, e_1 endlich durch eine lineare Verbindung von e_0, e_1, e_2 ersetzt. Unter diesen sind aber wiederum diejenigen ausgezeichnet, bei welchen die Masswerthe der Grössen zweiter und dritter Stufe ungeändert bleiben, bei denen also die äusseren Producte $[e_0 e_2]$ und $[e_0 e_1 e_2]$ ihre Werthe beibehalten. Diese Transformationen, die wir als „Bewegungen" des Gebietes bezeichnen, werden, wenn man das letztere Product gleich Eins setzt, erhalten, indem man an Stelle der Punkte e_0, e_1, e_2 der Gleichungen 1) neue Punkte einführt, deren Ausdrücke beziehungsweise die Form

$$e_0;\ e_1 + \lambda e_0 + \mu e_2;\ e_2 + \nu e_0$$

haben, (wo λ, μ, ν beliebige Zahlen sind).

Das äussere Product des Hauptpunktes $[e_0\ ab]$ mit zwei beliebigen Punkten a und b bleibt bei allen Bewegungen ungeändert, und kann als „Entfernung" der beiden Punkte eingeführt werden.

Alle Punkte, die von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung besitzen, sind zu einander „parallel", d. h., sie liegen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

auf einer durch den Hauptpunkt gehenden Geraden. Dieselbe geht ausserdem durch den gegebenen Punkt, wenn die Entfernung gleich Null wird, und fällt für eine unendliche Entfernung mit der Hauptlinie zusammen.

Die Punkte der Hauptlinie sind von allen nicht auf ihr gelegenen Punkten unendlich entfernt, die Entfernung zweier Punkte der Hauptlinie selbst dagegen ist unbestimmt; ebenso auch die Entfernung des Hauptpunktes von den übrigen Punkten.

Die beiden Geraden

$$[e_0\, e] + k[e_0\, e_2] \text{ und } [e_0\, e] - k[e_0\, e_2],$$

welche von einem beliebigen Punkte e entgegengesetzt gleiche Entfernungen $+k$ und $-k$ haben, bezeichnen wir auch hier wieder als „Kreis“,[1] e als einen Mittelpunkt desselben. Dann ergibt sich:

„Jeder Kreis besteht aus einem Paar von parallelen durch den Hauptpunkt gehenden Geraden und umgekehrt bildet jedes solche Linienpaar einen Kreis. Jeder Kreis besitzt unendlich viele Mittelpunkte, deren Ort eine ebenfalls durch den Hauptpunkt gehende Gerade ist, welche von der Hauptlinie durch die beiden Geraden, aus denen der Kreis besteht, harmonisch getrennt wird. — Je zwei parallele Punkte besitzen von irgend einem anderen Punkte dieselbe Entfernung.“

Um zu dem Begriff der Entfernung zweier Geraden zu gelangen, stellen wir dieselben als äussere Producte ihres Schnittpunktes e mit zwei anderen Punkten e' und e'' dar, die von e um die Länge $+1$ entfernt sind, also der Gleichung

$$[e_0\, e\, e'] = [e_0\, e\, e''] = 1$$

genügen. Dann wird die Differenz $e'' - e'$ ein Vielfaches des Hauptpunktes, weil die Gerade $[e'e'']$ nach Obigem durch diesen Punkt geht und $e'' - e'$ wegen des Bestehens der Gleichung $[e_0\, e\, (e'' - e')] = 0$ auch der Geraden $[e_0 e]$ angehört.

Man sieht leicht, dass wenn

$$e' - e'' = \lambda e_0,$$

die Zahl λ als „Entfernung“ der beiden Geraden einzuführen ist.

---

[1] Diese Figur ist ein Grenzfall des Kreises der euclidischen Geometrie.

Da $[e_0 e e'] = 1$ ist, erhält man für dieselbe den Ausdruck

$$\lambda = -[ee'e''] = [ee' . ee'' . e_0 e_2]$$

d. h. die Entfernung zweier Geraden ist gleich ihrem regressiven Product mit der Hauptlinie.

Alle Geraden, welche von einer bestimmten Geraden eine gegebene Entfernung besitzen, bilden einen Büschel paralleler Geraden, dessen Scheitel auf der Hauptlinie liegt, und, wenn die gegebene Entfernung Null oder unendlich ist, in den Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der Hauptlinie, bezüglich in den Hauptpunkt fällt.

Alle parallelen Geraden sind von einer beliebigen Geraden gleichweit entfernt.

Die Scheitelpunkte von zwei Büscheln paralleler Geraden bilden zusammen einen „Zirkel". Construirt man denjenigen Punkt, welcher vom Hauptpunkt durch die beiden Punkte des Zirkels harmonisch getrennt ist, und zieht durch ihn eine beliebige Gerade, so hat diese von zwei Geraden, die auf der Hauptlinie die Punkte des Zirkels ausschneiden, entgegengesetzt gleiche Entfernungen.

Es seien endlich auch hier noch die Beziehungen angegeben, welche die Entfernungen der Ecken und Seiten eines Dreiecks verbinden.

Man erhält, mit Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

$$a + b + c = 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$2J = bc\alpha = ca\beta = ab\gamma$$
$$2J' = \beta\gamma a = \gamma\alpha b = \alpha\beta c$$
$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma = J : J'$$

In dieser Geometrie sind also alle Wege zwischen denselben beiden Punkten gleich lang.